

dr Arkadiusz Orzechowski

Szkoła Główna Handlowa

Analiza efektywności obliczeniowej opcji na przykładzie modelu F. Blacka i M. Scholesa

Wprowadzenie

Jednym z największych osiągnięć w dziedzinie finansów jest model wyceny opcji autorstwa F. Blacka i M. Scholesa (1973, s. 637–654). Opracowane podejście opiera się na założeniu stanowiącym, iż ceny aktywów, na które opiekują opcje, podlegają geometrycznemu ruchowi Browna, w którym zmienność notowań walorów bazowych jest stała. Uproszczenie to nie pozwala jednak modelować rzeczywistego zachowania rynków finansowych. Jak zauważa bowiem m.in. R. Cont (2007, s. 289–309), empiryczne dane dotyczące zmian cen akcji i ich indeksów wskazują na istnienie nadmiaru zmienności stóp zwrotu (Fama, French 1993, s. 3–56), występowanie grubych ogonów w ich rozkładach i dodatniej kurtozy (Jondeau, Rockinger 2003, s. 559–581), braku liniowej autokorelacji rentowości papierów wartościowych (Mandelbrot 1963, 394–419), skłonności dochodowości walorów i ich portfeli do układania się w klastry (Lux, Marchesi 2000, s. 675–702) oraz korelacji wolumenu obrotu ze zmiennością rentowności (Fleming, Kirby 2011, s. 1714–1726). Zjawiska te przyczyniły się do powstania alternatywnych sposobów opisu ścieżek cenowych aktywów i ich koszyków oraz opracowania nowych podejść do określania wartości kontraktów bazujących na prawach pochodnych. Skonstruowane w tym celu modele można podzielić na te, w których:

- dopuszczona jest możliwość występowania skoków kursowych, tj. modele S. Kou'a (2002), VG (Madan, Carr, Chang 1998, s. 79–105), NIG (Barndorff-Nielsen 1998, s. 41–68), CGMY (Carr et al. 2002, s. 305–332);
- funkcjonuje założenie o braku stałości zmian wariancji kursów aktywów bazowych w czasie, tj. modele J. Hulla i A. White'a (1987, s. 281–300), E. Steina i J. Steina (1991, s. 727–752), S. Hestona (1993, s. 327–343), C. Balla i A. Romy (1994, s. 589–607) itd.;
- „parametry” nie są stałe, np. SABR (Hagan et al. 2002, s. 84–108).

Narzędziem, często wykorzystywanym w procesie określania wartości opcji, zarówno w modelach Levy'ego (modele F. Blacka i M. Scholesa, S. Kou'a, VG, NIG, CGMY), jak i typu *affine* (modele stochastycznej zmienności), jest transformata Fouriera. Ze względu na to, że może ona zostać uwzględniona w przekształceniach matematycznych na różne sposoby, istotnym wydaje się wybór takiego podejścia, które jest najbardziej efektywne.

Celem niniejszego artykułu jest przegląd istniejących sposobów wykorzystania transformaty Fouriera w procesie określania wartości opcji waniliowych typu europejskiego oraz zaproponowanie autorskiej koncepcji, która może stanowić alternatywę w stosunku do wcześniej opracowanych podejść. Wszystkie obliczenia wykonywane są przy założeniu, że uproszczenia w funkcjonowaniu rynków finansowych sformułowane przez F. Blacka i M. Scholesa (1973) są prawdziwe. Warto zauważyć, że opracowana metodologia może być wykorzystana w modelach Levy'ego oraz, po pewnych modyfikacjach, podlegać implementacji do modeli typu *affine*. W ramach podejmowanej problematyki przedmiotem szczególnego zainteresowania czyni się wybór takiego podejścia bazującego na transformacie Fouriera, które jest najbardziej efektywne pod względem szybkości generowania wartości teoretycznych opcji oraz precyzji obliczeniowej. Czynniki ryzyka brajnymi pod uwagę są cena i zmienność notowań instrumentu bazowego oraz czas pozostający do wygaśnięcia opcji.

1. Wycena opcji w modelu F. Blacka i M. Scholesa

Istnieją dwa podstawowe podejścia do wyceny opcji w ramach modelu F. Blacka i M. Scholesa (1973). Pierwsze z nich bazuje na rozwiązaniu równania różniczkowego cząstkowego drugiego rzędu, które przyjmuje następującą postać:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V(S_t, t)}{\partial S_t^2} + \frac{\partial V(S_t, t)}{\partial t} - rV_t + rS_t \frac{\partial V(S_t, t)}{\partial S_t} = 0 \quad (1)$$

gdzie:

$V(S_t, t)$ – wartość opcji zależna od ceny instrumentu podstawowego S_t i czasu t ,
 σ – zmienność stopy zwrotu z aktywów, na które opiewa kontrakt,
 r – stopa zwrotu wolną od ryzyka.

Ostatecznie, wartości opcji kupna i sprzedaży wyznaczane są odpowiednio zgodnie z poniższymi formułami (model określany dalej jako BS):

$$C(S_t, t) = S_t \mathcal{N}(d_1) - K e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_2) \quad (2)$$

$$P(S_t, t) = K e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(-d_2) - S_t \mathcal{N}(-d_1) \quad (3)$$

gdzie:

K – cena wykonania opcji,

$\mathcal{N}(\cdot)$ – dystrybuanta wystandaryzowanego rozkładu normalnego.

Drugie podejście, nazywane martyngałowym, zakłada, iż cena opcji jest wartością oczekiwaną przyszłych przepływów pieniężnych zdyskontowanych względem pewnej miary martyngałowej na moment dokonywania analizy. W konsekwencji, wartość kontraktów kupna i sprzedaży obliczana jest odpowiednio przy wykorzystaniu następujących wzorów:

$$C(S_t, t) = e^{-r(T-t)} \int_K^\infty (S_T - K) \frac{1}{S_T \sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \exp\left[-\frac{\{\ln S_T - (\ln S_t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t))\}^2}{2\sigma^2(T-t)}\right] dS_T \quad (4)$$

$$P(S_t, t) = e^{-r(T-t)} \int_0^K (K - S_T) \frac{1}{S_T \sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \exp\left[-\frac{\{\ln S_T - (\ln S_t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t))\}^2}{2\sigma^2(T-t)}\right] dS_T \quad (5)$$

2. Przegląd modeli wyceny opcji opartych na transformacie Fouriera

Wyróżnić można sześć podstawowych modeli pozwalających wycenić opcje przy wykorzystaniu transformaty Fouriera. Ze względu jednak na to, że ich dokładna analiza została przeprowadzona wcześniej (Orzechowski 2014, s. 157–174), w dalszej części artykułu będące przedmiotem zainteresowania koncepcje są prezentowane jedynie skrótowo.

Pierwszym z przedstawianych modeli jest model G. Bakshi i D. Madana (2000, s. 205–238) (określany dalej jako BS-BM). W ramach tego podejścia ceny aktywów bazowych oraz rozliczenia przekształcane są do wartości logarytmicznych. W rezultacie formuła (4) przyjmuje następującą postać:

$$C(S_t, t) = e^{-r(T-t)} \int_k^\infty (e^{s_T} - e^k) \tilde{q}(s_T | \Omega_t) ds_T \quad (6)$$

gdzie:

s_T i k – to odpowiednio logarytmy naturalne ceny aktywów podstawowych w momencie rozliczenia i ceny wykonania opcji

$\tilde{q}(s_T | \Omega_t)$ – oznacza funkcję gęstości prawdopodobieństwa zmiennej s_T przy filtracji Ω_t

Następnie, prawa strona równania (6) rozbijana jest na dwie części. Dla każdej z nich wyznaczane są transformaty Fouriera, które są kolejno odwracane. W rezultacie podjętych działań otrzymywany jest wzór na wartość teoretyczną opcji, tj.:

$$C(S_t, t) = \frac{1}{2}(S_t - Ke^{-r(T-t)}) + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_t \Re \left[\frac{e^{-i\xi k} \phi(\xi-i)}{i\xi \phi(-i)} \right] d\xi - \\ - Ke^{-r(T-t)} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re \left[\frac{e^{-i\xi k} \phi(\xi)}{i\xi} \right] d\xi \quad (7)$$

gdzie:

$\phi(\cdot)$ – transformata Fouriera,

$\Re[\cdot]$ – część rzeczywista funkcji podcałkowej,

i – część urojona liczby zespolonej.

Drugim modelem wyceny opcji jest model P. Carra i D. Madana (1999, s. 61–73) (określany dalej jako BS-CM). Punktem wyjścia rozpatrywanego podejścia jest zmiana cen aktywów bazowych i rozliczenia do postaci logarymicznej, co pozwala otrzymać formułę (6). Następnie, za funkcję gęstości prawdopodobieństwa zmiennej s_T podstawiana jest jej funkcja charakterystyczna, cena opcji zaś ulega modyfikacji przy pomocy parametru α . Ostatecznie, dla otrzymanej wielkości, obliczane są transformata Fouriera oraz odwrotna transformata Fouriera. Podjęte działania pozwalają wygenerować formułę określającą wartość modelową opcji kupna, tj.:

$$C(T) = \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi k} \frac{e^{-rT} \phi(\xi - (\alpha+1)i)}{\alpha^2 + \alpha - \xi^2 + i(2\alpha+1)\xi} d\xi \quad (8)$$

Otrzymany wynik jest modyfikowany przez P. Carra i D. Madana dla opcji o krótkich terminach pozostających do wygaśnięcia. Ostatecznie, wzór na wycenę instrumentów finansowych bazujących na prawach pochodnych przybiera postać:

$$Z(T) = \frac{1}{\sinh(\alpha k)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi k} \frac{\zeta(\xi - i\alpha) + \zeta(\xi + i\alpha)}{2} d\xi \quad (9)$$

gdzie: $\zeta_T(\xi) = e^{-rT} \left[\frac{1}{1+i\xi} - \frac{\phi(-i)}{i\xi} + \frac{\phi(\xi-i)}{i\xi(1+i\xi)} \right]$.

Trzecim modelem opartym na transformacie Fouriera jest model M. Attariego (2004) (metoda określana dalej jako BS-A). Wyprowadzenie rozpatrywanego podejścia rozpoczyna się od uogólnienia procesu odpowiedzialnego za kształtowanie cen instrumentu bazowego do następującej postaci:

$$S_T = S_t e^{r(T-t) + x(t,T)} \quad (10)$$

gdzie:

$x(t,T)$ – losowy „szok cenowy” aktywów bazowych, który może być utożsamiany zarówno ze skokiem kursowym, jak i dowolnym procesem o charakterze losowym.

Zakładając, że $x(t, T)$ ma rozkład normalny, łatwo można przetransformować wzór (6) do następującej postaci:

$$\begin{aligned} S_t \int_l^\infty e^{x(t, T)} \tilde{q}(x(t, T)) dx(t, T) - e^{-r(T-t)} K \int_l^\infty \tilde{q}(x(t, T)) dx(t, T) = \\ = S_t \pi_1 - e^{-r(T-t)} K \pi_2 \end{aligned} \quad (11)$$

gdzie: $l = \frac{K}{S_t e^{r(T-t)}}$.

Dostrzeżenie tego, że $0 \leq \int_l^\infty e^{x(t, T)} \tilde{q}(x(t, T)) dx(t, T) \leq 1$, umożliwia potraktowanie π_1 i π_2 jak funkcji gęstości prawdopodobieństwa. Wyznaczenie dla tych wielkości transformat Fouriera oraz odwrotnych transformat Fouriera pozwala na wyprowadzenie formuły określającej wartość opcji, tj.:

$$\begin{aligned} C(S_t, t) = S_t \left(1 + \frac{e^l}{\pi} \int_0^\infty \Re \left[\phi(\xi) \left(\frac{e^{-i\xi l}}{i(\xi + i)} \right) \right] d\xi \right) - \\ - e^{-r(T-t)} K \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re \left[\phi(\xi) \left(\frac{e^{-i\xi l}}{i\xi} \right) \right] d\xi \right) \end{aligned} \quad (12)$$

Czwartym modelem wyceny wykorzystującym transformatę Fouriera jest model D. Batesa (2006, s. 909–956) (określany dalej jako BS-B). Jego konstrukcja oparta jest na niewielkiej modyfikacji koncepcji M. Attariego (2004). Podobnie jak poprzednio, formuła (6) ulega przekształceniu, z tą jednak różnicą, że w tym przypadku wygenerowany wzór przyjmuje następującą postać:

$$C(S_t, t) = S_0 - e^{-r(T-t)} K \int_{-\infty}^{\frac{S_T}{K}} \tilde{q}(S_T | \Omega_t) dS_T - e^{-r(T-t)} \int_K^\infty K \tilde{q}(S_T | \Omega_t) dS_T \quad (13)$$

Następnie, wzór (13) jest modyfikowany poprzez zamianę cen aktywów bazowych i wykonania na logarytmiczne wartości rozpatrywanych wartości. Ostatecznie, obliczane są kolejno transformata Fouriera dla funkcji gęstości prawdopodobieństwa $\tilde{q}(S_T | \Omega_t)$ oraz odwrotna transformata Fouriera. Pozwala to wyznaczyć wartość opcji zgodną z poniższym wzorem:

$$C(S_t, t) = S_0 - e^{-r(T-t)} K \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Re \left[\frac{e^{-i\xi k}}{i\xi(1-i\xi)} \phi(\xi) \right] d\xi \right) \quad (14)$$

Piątym modelem opartym na transformacie Fouriera jest model A. Lewisa (2001) (metoda określana dalej jako BS-Le). W ramach zaproponowanego podejścia wartość kontraktów bazujących na prawach pochodnych określana jest poprzez wielokrotne przekształcenie wzoru (6). Na początku, w ramach podejmowanych czynności, dokonywane jest podstawienie: $sT = \ln S_T$ oraz wyznaczana jest transformata Fouriera zmodyfikowanej funkcji wypłaty analizowanych instrumentów finansowych. Ostatecznie, odwołanie się do definicji uogólnionej transformaty

Fouriera pozwala określić wartość europejskiej opcji kupna w modelu F. Blacka i M. Scholesa w następujący sposób:

$$C(S_t, t) = S_t - \frac{\sqrt{S_t K e^{-r(T-t)}}}{\pi} \int_0^\infty \Re \left[\phi \left(u - \frac{i}{2} \right) \frac{e^{i u k}}{u^2 + \frac{1}{4}} \right] du \quad (15)$$

Szóstym modelem wyceny opcji, w którym wykorzystywana jest transformata Fouriera, jest model A. Liptona (2002) (metoda określana dalej jako BS-Li). Punktem wyjścia przeprowadzonej analizy są przekształcenia wykonane w ramach poprzedniego podejścia. Znając sposób wyznaczania funkcji charakterystycznej przy założeniu, że $\xi = u - \frac{i}{2}$, tj.:

$$\phi \left(u - \frac{i}{2} \right) = e^{-\frac{\sigma^2 T}{2} \left(u^2 + \frac{1}{4} \right)} \quad (16)$$

można łatwo obliczyć cenę teoretyczną europejskiej opcji kupna, tj.:

$$C(S_t, t) = S_t - \frac{K e^{-r(T-t)}}{\pi} \int_0^\infty \Re \left[\frac{e^{\left(i u + \frac{1}{2} \right) k - \left(u^2 + \frac{1}{4} \right) \frac{\sigma^2 T}{2}}}{u^2 - \frac{1}{4}} \right] du \quad (17)$$

3. Nowy model wyceny opcji oparty na transformacie Fouriera

Nowe podejście (oznaczone dalej jako BS-Au), pozwalające wycenić opcje przy wykorzystaniu transformaty Fouriera, składa się z kilku etapów. Na początku dokonana jest następująca zamiana zmiennych: $sT = \ln S_T$ oraz $k = \ln K$, która umożliwia wyrażenie wartości opcji kupna zgodnie ze wzorem (6). Następnie, prawa strona równania (6) rozbijana jest na dwie części, tj.:

$$C(S_t, t) = e^{-r(T-t)} \int_k^\infty e^{sT} \tilde{q}(s_T | \Omega_t) ds_T - e^{-r(T-t)} \int_k^\infty e^k \tilde{q}(s_T | \Omega_t) ds_T \quad (18)$$

Dla pierwszej z nich wyznaczana jest transformata Fouriera tak jak w modelu G. Bakshiego i D. Madana (2000, s. 205–238), tj.:

$$\Psi_T^1(\xi) = \int_{-\infty}^\infty e^{i\xi k} \left[e^{-r(T-t)} \frac{\int_k^\infty e^{sT} \tilde{q}(s_T | \Omega_t) ds_T}{\int_k^\infty e^{sT} \tilde{q}(s_T | \Omega_t) ds_T} \int_k^\infty e^{sT} \tilde{q}(s_T | \Omega_t) ds_T \right] dk \quad (19)$$

Warto zauważyć, że $\int_k^\infty e^{sT} \tilde{q}(s_T | \Omega_t) ds_T$ może być traktowana zarówno jako funkcja charakterystyczna $\tilde{q}(s_T | \Omega_t)$ przy $\xi = -i$, tj. $\phi(-i)$, jak i wartość oczekiwana zmiennej S_T . Pozwala to przekształcić wzór (19) do poniższej postaci:

$$\Psi_T^1(\xi) = \frac{S_t \phi(\xi-i)}{i\xi \phi(-i)} \quad (20)$$

Dla drugiej części równania (18) wyznaczana jest transformata Fouriera w następujący sposób:

$$\Psi_T^2(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi k} \int_k^{\infty} e^k \tilde{q}(s_T | \Omega_t) ds_T dk = \frac{\phi(\xi-i)}{i\xi+1} \quad (21)$$

Odwrócenie transformat Fouriera oraz wstawienie ich do wzoru (18) pozwala ostatecznie otrzymać wzór na cenę opcji kupna, tj.:

$$C(S_t, t) = e^{-r(T-t)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi k} \frac{S_t \phi(\xi-i)}{i\xi \phi(-i)} d\xi - \\ - e^{-r(T-t)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi k} \frac{\phi(\xi-i)}{i\xi+1} d\xi \quad (22)$$

Po uproszczeniu formuła (22) może być zapisana jako:

$$C(S_t, t) = \frac{1}{2} S_t - e^{-r(T-t)} \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \Re \left[e^{-i\xi k} \frac{\phi(\xi-i)}{i\xi(i\xi+1)} \right] d\xi \quad (23)$$

4. Szybkość obliczeniowa

Znajomość formuł analitycznych na wycenę opcji pozwala dokonać pomiaru szybkości generowania wartości teoretycznych kontraktów w ramach każdego z uwzględnionych podejść. Czas, który jest potrzebny do określenia cen modelowych instrumentów finansowych bazujących na prawach pochodnych, jest wyznaczany przy założeniu, że stosowne kody napisane są w pakiecie *Mathematica 7.0* uruchamianym na komputerze z procesorem Intel i5-4210U CPU @ 2,40 GHz z pamięcią RAM równą 6 GB. Przy obliczeniach przyjęto założenie, że cena wykonania opcji wynosi 60, zmienność dochodowości aktywa bazowego oraz stopa zwrotu wolna od ryzyka kształtują się na poziomie 5%, a okres pozostający do wygaśnięcia zmienia się z $t/T = 0,01$ do $t/T = 0,05$, a następnie do $t/T = 0,09$. Wyniki otrzymane dla kontraktów *in-the-money* (ITM), *at-the-money* (ATM) oraz *out-of-the-money* (OTM) w różnych okresach do wygaśnięcia prezentowane są w tabeli 1.

Z informacji zawartych w tabeli wynika, że wycenę teoretyczną opcji europejskich można otrzymać najszybciej, stosując metodę BS. Nie powinno być to zaskoczeniem, gdyż jest to jedyne podejście, spośród uwzględnionych, które ma charakter analityczny. Najwolniej wycenę kontraktów bazujących na prawach pochodnych można wygenerować, wykorzystując podejścia BS-CM i BS-A. Pozostałe sposoby wyznaczania wartości opcji należy traktować jako równorzędne pod względem szybkości obliczeniowej.

Tabela 1
 Porównanie szybkości obliczeniowej wyceny europejskich opcji kupna metodami bazującymi na transformacie Fouriera

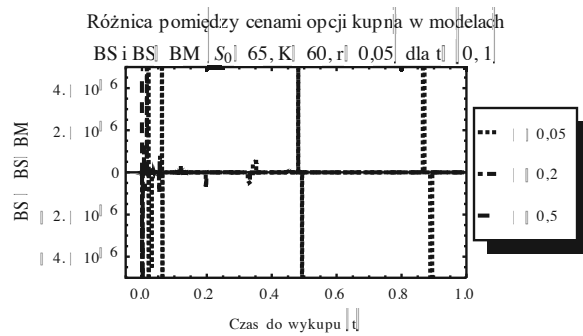
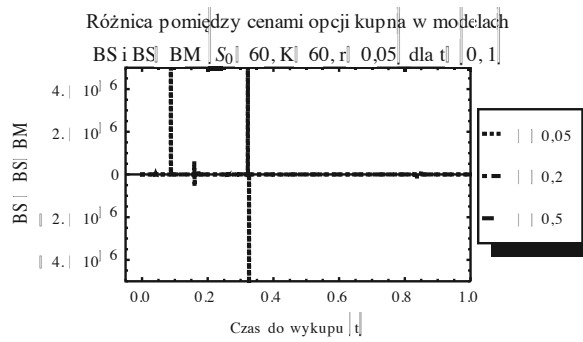
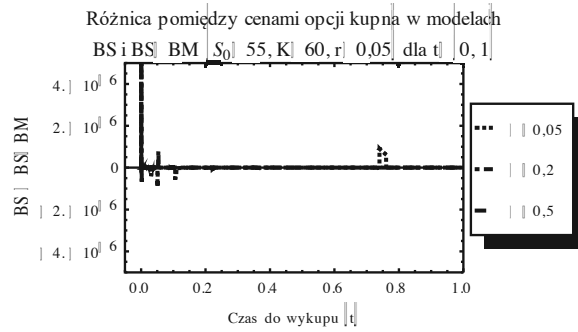
	Czas do wygaśnięcia dla różnych kategorii opcji (w sekundach)								
	OTM ($S_0 = 55$)			ATM ($S_0 = 60$)			ITM ($S_0 = 65$)		
	$t/T=0,01$	$t/T=0,05$	$t/T=0,09$	$t/T=0,01$	$t/T=0,05$	$t/T=0,09$	$t/T=0,01$	$t/T=0,05$	$t/T=0,09$
BS	$2,0 \times 10^{-15}$	$1,6 \times 10^{-15}$	$2,8 \times 10^{-15}$	$1,5 \times 10^{-15}$	$1,4 \times 10^{-15}$	$2,3 \times 10^{-15}$	$1,7 \times 10^{-15}$	$3,33 \times 10^{-16}$	$6,28 \times 10^{-16}$
BS-BM	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
BS-CM	0,05	0,03	0,03	0,05	0,03	0,05	0,05	0,03	0,05
BS-A	0,05	0,05	0,03	0,05	0,05	0,03	0,05	0,05	0,03
BS-B	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
BS-Le	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
BS-Li	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
BS-Au	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02

Źródło: opracowanie własne.

5. Analiza błędu obliczeniowego

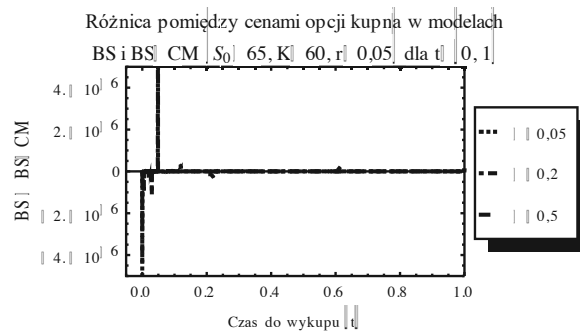
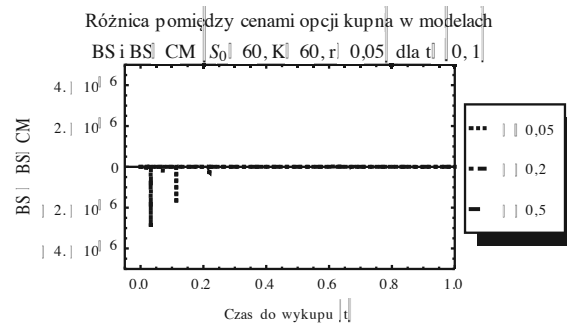
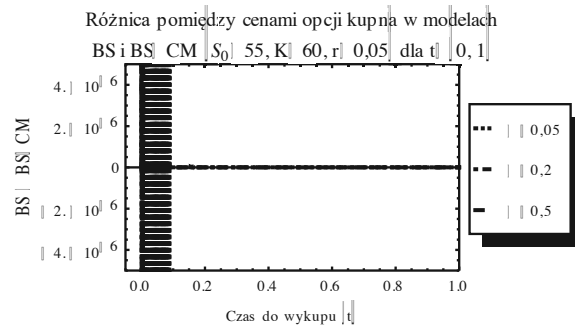
W celu ostatecznego wyboru najbardziej efektywnego rozwiązania, spośród omawianych, obliczane są różnice pomiędzy cenami teoretycznymi generowanymi przez model BS i poszczególne podejścia wykorzystujące transformatę Fouriera. Podobnie jak poprzednio, przedmiotem analizy są opcje, których cena wykonania wynosi 60, odchylenie standardowe dochodowości aktywa bazowego oraz rentowność instrumentów wolnych od ryzyka kształtują się na poziomie 5%, a czas pozostający do wygaśnięcia zmienia się $zt/T = 0,01$ do $t/T = 0,05$, a następnie do $t/T = 0,09$. Otrzymane wyniki prezentowane są na wykresach 1–7.

Wykres 1
Różnice pomiędzy teoretycznymi cenami opcji kupna wyznaczonymi metodą BS oraz BS-BM dla opcji OTM, ATM i ITM



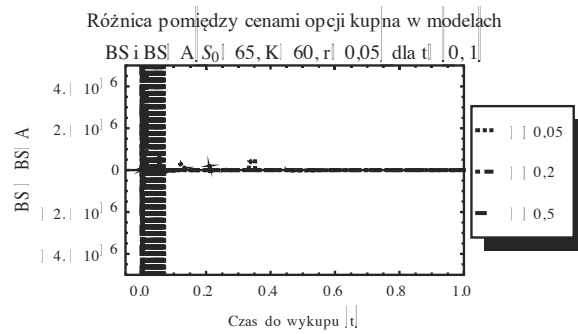
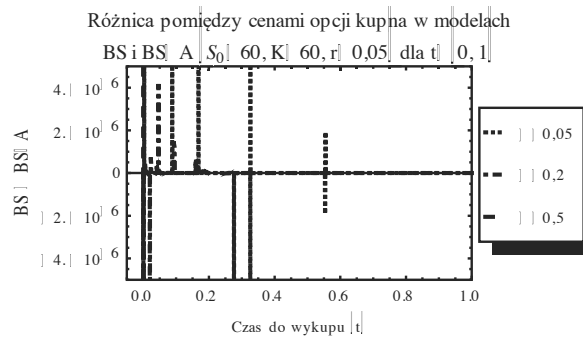
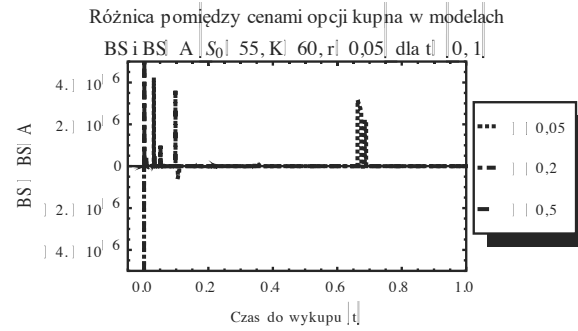
Źródło: opracowanie własne.

Wykres 2
Różnice pomiędzy teoretycznymi cenami opcji kupna wyznaczonymi metodą BS
oraz BS-CM $\alpha = 1$ dla opcji OTM, ATM i ITM



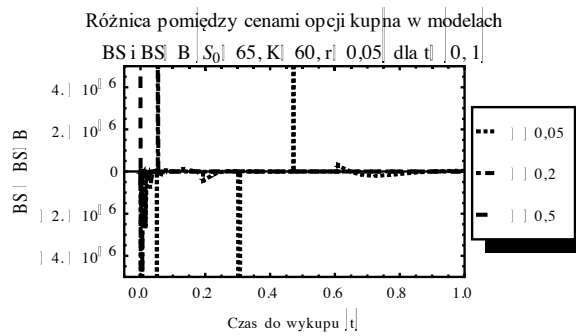
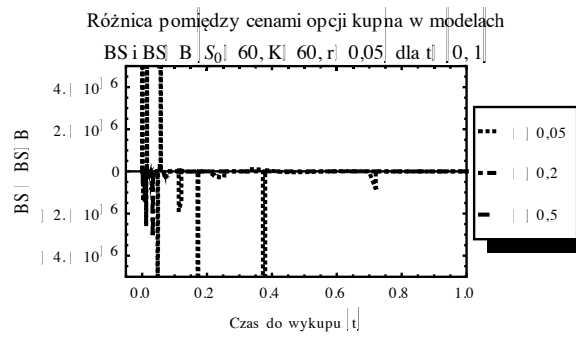
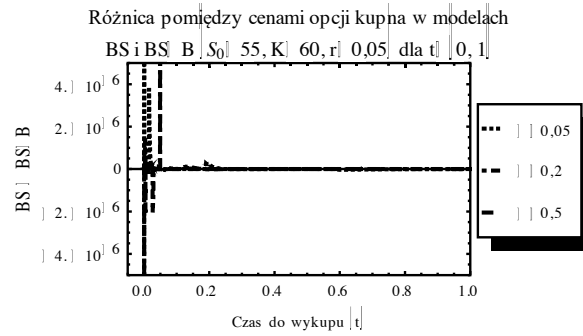
Źródło: opracowanie własne.

Wykres 3
Różnice pomiędzy teoretycznymi cenami opcji kupna wyznaczonymi metodą BS oraz BS-A dla opcji OTM, ATM i ITM



Źródło: opracowanie własne.

Wykres 4
Różnice pomiędzy teoretycznymi cenami opcji kupna wyznaczonymi metodą BS
oraz BS-B dla opcji OTM, ATM i ITM



Źródło: opracowanie własne.